

Master EEA 1A, Pro AEII et recherche ESCI

Examen: Réseaux de Petri

AE406T2

durée: 1h30

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées. Aucun document autorisé. Les téléphones portables (même éteints) calculatrices et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Tous les exercices sont indépendant

1 Etude des propriétés d'un réseau de Petri

On considère le réseau de Petri représenté figure 1. Il modélise le fonctionnement d'une

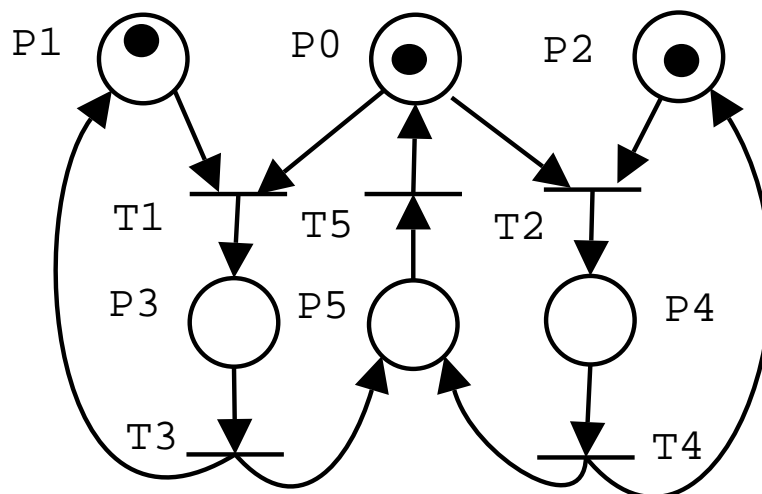


Figure 1: Entreprise de location de voitures

entreprise de location de voitures qui a deux types de clients.

La place P_0 correspond au nombre de voitures prêtes à être louées. La place P_1 (respectivement P_2) indique le nombre de clients de type 1 (resp. 2) attendant pour louer une voiture. Le franchissement de la transition T_1 (respectivement T_2) correspond au début de la location d'une voiture par un client de type 1 (resp. 2). Le nombre de marques dans la place P_3 (resp. P_4) correspond au nombre de voitures louées par les clients de type 1 (resp. 2). La fin de la location par un client de type 1 (resp. 2) correspond au franchissement de la transition T_3 (resp. T_4). La voiture est alors au garage pour entretien : le nombre de jetons dans P_5 indique le nombre de voitures au garage. Le franchissement de la transition T_5 correspond à la fin de l'entretien.

1. Etude du réseau de Petri par Réduction

Rappel : il faut justifier l'application des règles de réduction en montrant que les conditions d'application sont satisfaites.

- (a) Construire un réseau de Petri réduit du réseau de Petri figure 1 en utilisant les réductions Ra et Rb.
- (b) A partir de ce réseau de Petri réduit, déterminer les invariants de marquage. En déduire si le réseau de Petri est conservatif.
- (c) Interpréter les invariants de marquage déterminés dans la question précédente.
- (d) Construire un réseau de Petri réduit en utilisant les réductions R1, R2, R3 et R4.
- (e) A partir de ce réseau de Petri réduit, déterminer si le réseau est vivant et borné. Quelles sont les séquences répétitives stationnaires ?

2. Etude du réseau de Petri par le graphe des marquages

- (a) Construire le graphe des marquages accessibles pour le marquage initial défini par la figure 1.
- (b) A partir de ce graphe, déterminer si le réseau de Petri est borné et vivant.
- (c) Déterminer l'ensemble de toutes les séquences de franchissement. Existe-il une ou plusieurs séquence(s) répétitive(s) ? Si oui, la (les) donner.

2 Questions de cours

1. Sous quelles conditions la transition d'un réseau de Petri généralisé est-elle franchissable ?
2. Sous quelles conditions la transition d'un réseau de Petri coloré est-elle franchissable ?
3. Y a-t-il un lien entre la bornitude d'un réseau de Petri synchronisé et le bornitude du réseau de Petri ordinaire associé ? Si oui, lequel.
4. Donner la définition d'une place implicite (règle de réduction R2).

3 Modélisation du fonctionnement d'une station de ski par réseaux de Petri

L'objectif est de modéliser le fonctionnement d'une petite station de ski dotée de deux caisses et d'une piste de ski desservie par un téléphérique. Le bas de la piste est à la sortie de deux caisses : le téléphérique permet d'atteindre le haut de la piste à partir du bas de celle-ci.

La deuxième partie de l'exercice est indépendante de la première.

1. Modélisation du fonctionnement des caisses

- (a) A son arrivée, pour l'achat de son forfait, un client choisit de faire la queue devant l'une des deux caisses. Ce choix effectué, il ne peut pas changer de caisse. De plus, il n'y a pas de limitation sur la longueur des deux queues. Par contre, chaque caisse ne peut traiter qu'un seul client à la fois. Représenter le fonctionnement des deux caisses par un réseau de Petri ordinaire. Comment le modifier en un réseau de Petri P-temporisé pour prendre en compte la durée d minimale de traitement d'un client par une caisse ?
- (b) Représenter le fonctionnement des deux caisses par un réseau de Petri coloré (sans prendre en compte la durée d).

2. Modélisation du fonctionnement du téléphérique. La question (d) est indépendante de la question (c).

- (a) La cabine du téléphérique est au départ en bas de la piste, en train d'attendre que les clients entrent dans la cabine. Une fois que ceux-ci sont entrés, la cabine monte en haut de la piste. Arrivée en haut de la piste, elle attend que les clients sortent de la cabine. Ensuite, elle redescend vers le bas de la piste pour charger à nouveau des clients. Représenter le fonctionnement de la cabine de téléphérique par un réseau de Petri ordinaire, sans modéliser l'entrée et la sortie des clients.
- (b) Après avoir acheté son forfait à la caisse, le client va faire la queue pour prendre le téléphérique. Quand la cabine du téléphérique est en bas de la piste, les clients entrent un par un dans la cabine qui ne peut contenir qu'un maximum de 5 clients. Arrivés en haut de la piste, tous les clients sortent de la cabine. Représenter le fonctionnement du téléphérique avec clients par un réseau de Petri ordinaire en complétant le réseau de Petri ordinaire de la question précédente.
- (c) L'entrée d'un client dans la cabine en bas de la piste a une durée d_1 , sa sortie de la cabine en haut de la piste a une durée d_2 . De plus, les clients entrent et sortent un par un. Modifier le réseau de Petri ordinaire de la question (b) pour prendre en compte ce phénomène. Le réseau ainsi obtenu sera P-temporisé.
- (d) Le téléphérique entamera la montée que quand un minimum de 2 clients est à l'intérieur de la cabine. Quand la cabine est vide, elle entamera sa descente. Compléter le réseau de Petri ordinaire de la question (b) pour prendre en compte ces deux phénomènes. Le réseau ainsi obtenu sera généralisé.

Master EEA 1A, Pro AEII et Recherche ESCI

Examen: Réseaux de Petri

AE406T2

durée: 1h30

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées. Aucun document autorisé. Les téléphones portables (même éteints) calculatrices et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Tous les exercices sont indépendant

1 Questions de cours

1. Expliquer le lien entre T-semi flot et séquence répétitive.
2. Si la transition T_j est quasi vivante pour un marquage initial M_0 alors que peut-on dire pour le marquage initial $M'_0 \geq M_0$? Même question pour une transition T_j vivante.
3. Quelle est la différence entre un conflit effectif et un conflit structurel ?
4. Donner la définition d'une place substituable (règle de réduction R1).

2 Modélisation du fonctionnement de chariots par réseaux de Petri

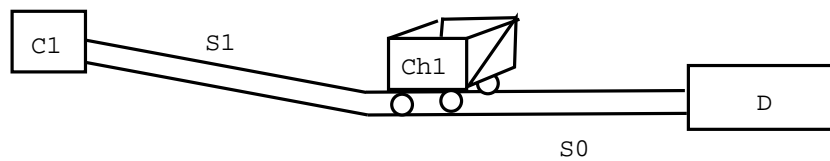


Figure 1: Un chariot

1. Un chariot Ch_1 transporte du matériel d'un point de chargement C_1 à un point de déchargement D en empruntant une voie ferrée *unique* découpée en deux secteurs S_1 et S_0 (voir Figure 1). Au départ, le chariot stationne sur le point de chargement C_1 . Il emprunte le secteur S_1 puis S_0 de la voie ferrée pour arriver au point de déchargement D . Après avoir stationné en D , il emprunte le secteur S_0 puis S_1 afin de regagner le point de chargement.

Représenter le fonctionnement du chariot par un réseau de Petri ordinaire. Le modèle doit prendre en compte le fait qu'il ne peut y avoir qu'un seul chariot, que ce soit dans le point de chargement C_1 ou le secteur S_0 ou le secteur S_1 ou encore le point de déchargement D .

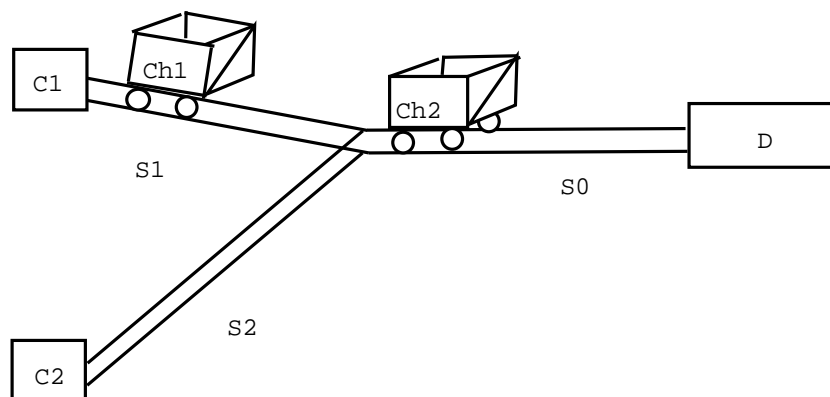


Figure 2: Deux chariots

2. Un deuxième chariot Ch_2 transporte du matériel d'un second point de chargement C_2 au point de déchargement D en empruntant une voie ferrée découpée en deux secteurs S_2 et S_0 (voir figure 2). Au départ, le chariot Ch_2 est sur le point de chargement C_2 . Noter que le point de déchargement D et le secteur S_0 sont communs aux chariots Ch_1 et Ch_2 . Le chariot Ch_1 (respectivement Ch_2) sur la voie S_1 (resp. S_2) ne peut emprunter la voie S_0 que si cette voie et le point de déchargement D sont libres.

Représenter le fonctionnement de l'ensemble des deux chariots par un réseau de Petri ordinaire.

3. Représenter le fonctionnement de cet ensemble de deux chariots par un réseau de Petri coloré.

3 Etude des performances d'une usine de recyclage

On considère le recyclage d'objets de deux types, numérotés 1 et 2, par une usine équipée de deux machines, numérotés 1 et 2. La première machine permet le recyclage complet d'objets de type 1 ou 2, le recyclage ayant une durée minimale d_1 . La seconde machine ne permet que le recyclage d'objets de type 2, le recyclage ayant une durée minimale d_2 . Chaque machine ne peut recycler qu'un seul objet à la fois. A la sortie de l'usine de recyclage, les objets de type 1 (respectivement 2) sont utilisés par les consommateurs pendant une durée au moins égale à d_4 (resp. d_3) avant d'être renvoyés à l'usine de recyclage. A l'instant initial, les consommateurs utilisent N_1 objets de type 1 et N_2 objets de type 2 ; les machines 1 et 2 sont disponibles.

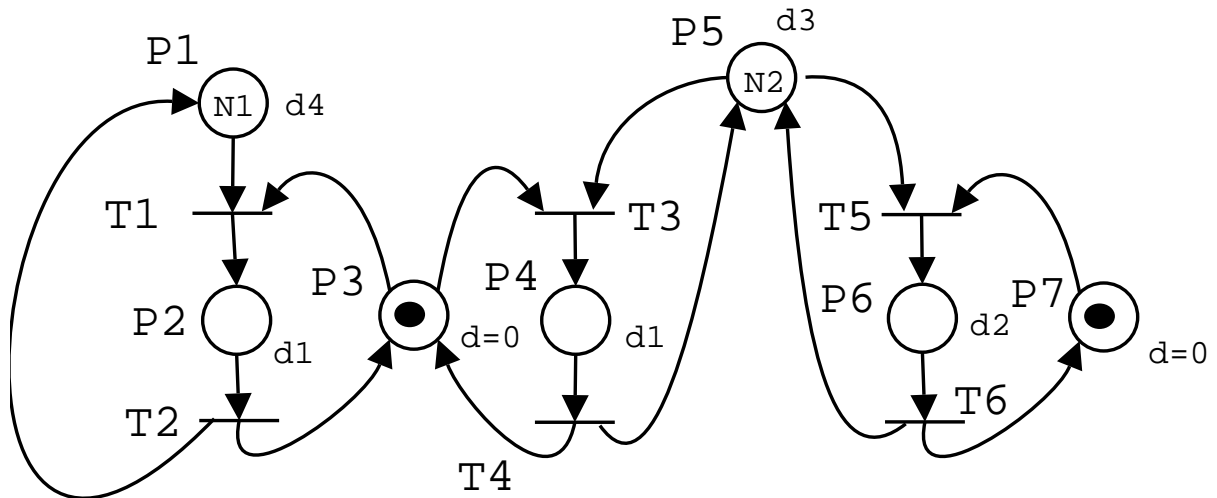


Figure 3: Recyclage des produits 1 et 2

Le fonctionnement du recyclage est modélisé par le réseau de Petri représenté figure 3. Le nombre de marques dans la place P_1 (resp. P_5) représente le nombre d'objets de type 1 (resp. 2) en cours d'utilisation par des consommateurs. Une marque dans la place P_3 (resp. P_7) indique que la machine 1 (resp. 2) est disponible. Une marque dans la place P_2 (resp. P_4) indique que la machine 1 est en train de recycler un objet 1 (resp. 2). Une marque dans la place P_6 indique que la machine 2 est en train de recycler un objet de type 2.

1. Etude du réseau de Petri par Algèbre Linéaire

- Déterminer la matrice d'incidence arrière et la matrice d'incidence du réseau de Petri représenté figure 3.
- Déterminer un ensemble minimal de P-semi flots élémentaires.
- En déduire les invariants de marquage.
- Interpréter des différents invariants de marquage obtenus.

2. Etude des performances temporelles

- (a) A partir des résultats des questions 1a et 1b, déterminer l'ensemble des inégalités satisfaites par les fréquences de franchissement des différentes transitions.
- (b) En déduire la fréquence maximale d'utilisation de la machine 2 (fréquence de franchissements F_5 de la transition T_5). Quelle doit être la valeur minimale de N_2 pour qu'elle se produise ? Que vaut alors la fréquence de franchissements F_3 de la transition T_3 pour cette valeur de N_2 ? Faire l'application numérique avec $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$ et $d_4 = 3$.
- (c) On suppose maintenant que $N_1 = 4$ et $N_2 = 5$. On fonctionne toujours avec une fréquence de franchissement F_5 maximale. Représenter dans un plan avec la fréquence de franchissements F_1 en abscisse et la fréquence de franchissement F_3 en ordonnée, l'ensemble des fréquences F_1 et F_3 qu'il est possible d'obtenir. En déduire la fréquence maximale d'utilisation de la machine 1.

Master EEA 1A, option AEII et option ESCI

Examen: Réseaux de Petri

AE406T2

durée: 1h30

Responsable : G. Scorletti

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées. Aucun document autorisé. Les téléphones portables (même éteints) calculatrices et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Tous les exercices sont indépendant

1 Questions de cours

1. Donner la définition d'une transition impure.
2. Donner un exemple de sémaphore.
3. Quelles sont les différentes approches de modélisation structurée ? Les décrire brièvement.
4. Énoncer l'équation fondamentale.

2 Modélisation de séquences d'opérations par RdP

1. On considère 3 machines M_1 , M_2 et M_3 . A chaque instant, chaque machine attend ou effectue une opération. le déroulement des différentes opérations est défini par les règles suivantes :

- Les machines M_1 , M_2 et M_3 peuvent fonctionner simultanément.
- Néanmoins, une opération sur la machine M_2 ou une opération sur la machine M_3 ne peut démarrer qu'après la fin d'une opération sur la machine M_1 .
- Le nombre d'opérations effectuées sur la machine M_1 doit toujours être supérieur ou égal à la somme du nombre d'opérations effectuées sur la machine M_2 et du nombre d'opérations effectuées sur la machine M_3 .

Au départ, la machine M_1 effectue une opération alors que les machines M_2 et M_3 sont en attente.

Représenter le fonctionnement de ces 3 machines par un Réseau de Petri ordinaire.

2. A l'ensemble des règles précédentes, on rajoute la règle suivante :

- Une opération sur la machine M_1 ne peut démarrer que si une opération sur la machine M_2 ou une opération sur la machine M_3 a été effectuée.

Modifier le Réseau de Petri précédent de façon à prendre en compte cette règle supplémentaire.

3 Coloriage d'un Réseau de Petri

Une machine à remplir et à boucher des bouteilles (Figure 1) est composée de trois postes travaillent en parallèle.

- Le poste 1 sert au transfert et au chargement. Dans on premier temps, un sort le vérin de transfert B pour à décaler le convoyeur d'une position vers la droite. Ensuite, le vérin A sert au chargement d'une nouvelle bouteille vide sur le convoyeur.
- Le poste 2 sert au remplissage des bouteilles à l'aide de la vanne D.
- Le poste 3 est le poste de bouchage.

Les actions de chargement d'une bouteille, remplissage d'une bouteille et bouchage d'une bouteille sont effectuées en parallèle. Le transfert par le vérin B n'est effectué que lorsque ces trois opérations sont terminées.

Il a été vu en cours que ce système peut être représenté par le Réseau de Petri Figure 2.

1. Pour chaque place, indiquer ce que représente la variable d'état associée. Indiquer l'événement associé à chaque transition.
2. Modéliser ce système par un Réseau de Petri *coloré*.
3. Dans la machine considéré, 3 opérations s'effectuent en parallèle. Modifier le Réseau de Petri coloré de la question précédente de façon à représenter une machine qui effectuerait $n \geq 2$ opérations en parallèle, avec n un entier naturel.

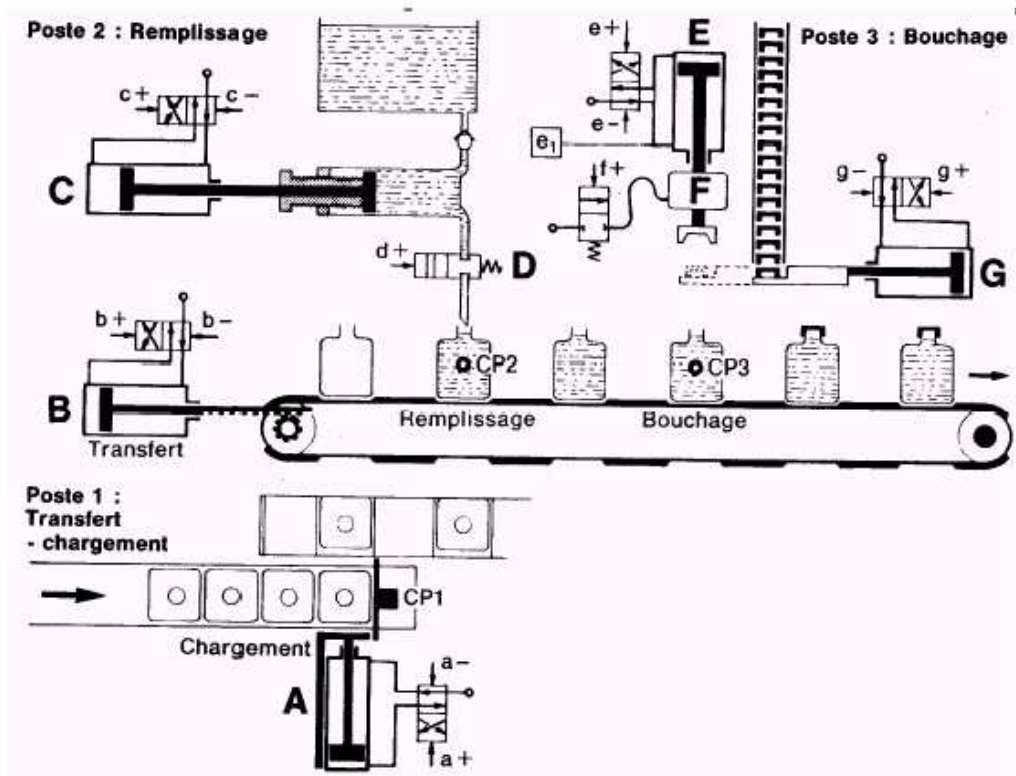


Figure 1: Parallélisme

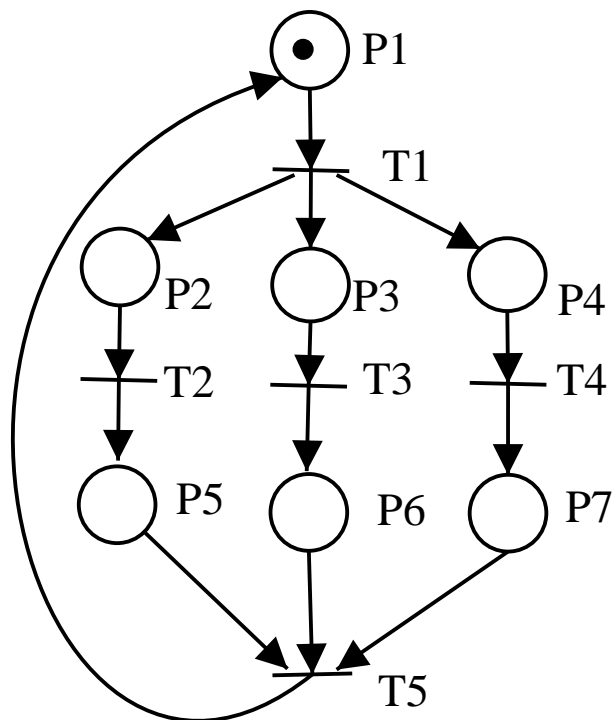


Figure 2: RdP machine à remplir et à boucher

4 Etude des propriétés d'un Réseau de Petri

On considère le Réseau de Petri représenté Figure 2.

1. Etude du réseau de Petri par Réduction

Rappel : il faut justifier l'application des règles de réduction en montrant que les conditions d'application sont satisfaites.

- (a) Construire un réseau de Petri réduit du réseau de Petri Figure 2 en utilisant les réductions Ra et Rb.
- (b) A partir de ce réseau de Petri réduit, déterminer les invariants de marquage. En déduire si le réseau de Petri est borné et conservatif.
- (c) Interpréter les invariants de marquage déterminés dans la question précédente.
- (d) Construire un réseau de Petri réduit en utilisant les réductions R1, R2, R3 et R4.
- (e) A partir de ce réseau de Petri réduit, déterminer si le réseau est vivant. Y a-t-il des séquences répétitives ? Si oui lesquelles ?

2. Etude du réseau de Petri par Algèbre Linéaire

- (a) Déterminer la matrice d'incidence associée au réseau de Petri.
- (b) A partir de la matrice d'incidence, rechercher les séquences répétitives stationnaires.
- (c) A partir de la matrice d'incidence, déterminer les P-semi flots.

Master EEA 1A, Pro AEII et Recherche ESCI

Examen: Réseaux de Petri

AE406T2

durée: 1h30

Responsable : E. Magarotto

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées. Document autorisé : une feuille A4. Les téléphones portables (même éteints) calculatrices et ordinateurs de poche ne sont pas autorisés. La note finale prendra en compte la qualité de la rédaction et des justifications des réponses.

Tous les exercices sont indépendants

1 Questions de cours

1. Donner les définitions d'une transition identique et d'une transition impure. Quelles sont les propriétés qui sont conservées ?
2. Quelle est la condition de franchissement d'une transition pour un RDP généralisé ? pour un RDP coloré ?
3. Quel est l'intérêt principal du graphe de couverture ? Permet-il d'en déduire la bornitude et la vivacité ?

2 Modélisation d'un système de communication pipeline par réseaux de Petri

1. Un système de communication asynchrone envoie des paquets de bits selon la technique du pipeline à 3 niveaux. Ce système est constitué de 3 programmes informatiques 1, 2 et 3 qui fonctionnent de la manière suivante :
 - L'exécution d'un programme permet de traiter un et un seul paquet de données.
 - Le paquet de données obtenu à l'issue de l'exécution du programme 1 est envoyé dans une mémoire (appelée *buffer*).
 - Cette mémoire est en entrée du programme 2 qui fera un second traitement du paquet de données. Une fois le traitement terminé, le paquet est envoyé dans une deuxième mémoire.
 - Cette deuxième mémoire est en entrée du programme 3 qui fera un troisième traitement du paquet de données. Une fois le traitement terminé, le paquet est envoyé définitivement sur la ligne de transmission qui ne sera pas modélisée.

En utilisant l'approche par composition, représenter le fonctionnement du système de communication par un réseau de Petri ordinaire. On prendra soin de préciser la signification des places et transitions.

2. Le programme 2 est modifié de façon à pouvoir traiter simultanément 2 paquets. Comment obtenir un nouveau RDP ordinaire qui prend en compte cette modification sans ajouter ni sommet (place ou transition), ni arcs ?
3. Dans l'ensemble du système précédent, il ne peut y avoir que 4 paquets au maximum. Modifier le RDP précédent pour prendre en compte cette modification.
4. Représenter le fonctionnement de ce dernier RDP par un réseau de Petri coloré dont on précisera la signification des couleurs et des fonctions associées.

3 Etude des performances d'un centre de location de pédalos et bateaux

Un centre de location est dirigé par 2 gérants. Ce centre contient un parc de 10 pédalos et de 5 bateaux.

- Pour les pédalos, chaque client paie pour une utilisation d'une heure de navigation sur le lac (60 mn, d2). Lorsqu'une location est demandée, un gérant doit procéder à l'installation des clients dans le pédalo. Cette première opération lui prend 3 mn (d1). Au retour des clients, le gérant doit effectuer la sortie des clients, encaisser la somme correspondant à la location et remettre le pédalo en place pour une utilisation future. Cette dernière opération lui prend 5 mn (d3).
- Pour les bateaux, chaque client paie pour une utilisation d'une heure de navigation sur le lac (60 mn, d6). Lorsqu'une location est demandée, un gérant doit procéder à l'installation des clients dans le bateau et lui expliquer les commandes et les règles de navigation. Cette première opération lui prend 8 mn (d5). Au retour des clients,

le gérant doit effectuer la sortie des clients, encaisser la somme correspondant à la location, faire le plein en carburant et remettre le bateau en place pour une utilisation future. Cette dernière opération lui prend 8 mn (d7).

Le fonctionnement de la location est modélisé par le réseau de Petri représenté figure 1.

- Le nombre de marques dans la place P_4 (respectivement P_8) représente le nombre de pédalos disponibles (resp. de bateaux).
- Une marque dans la place P_1 (resp. P_5) indique que l'on procède à l'installation des clients dans le pédalo (resp. le bateau).
- Une marque dans la place P_2 (resp. P_6) indique que le pédalo (resp. le bateau) est en cours de navigation.
- Une marque dans la place P_3 (resp. P_7) indique que l'on procède à la remise de pédalo (resp. de bateau).
- Le nombre de marques dans la place P_9 représente le nombre de gérants disponibles.
- Le marquage initial est défini figure 1 avec $n = 10$ et $m = 5$.

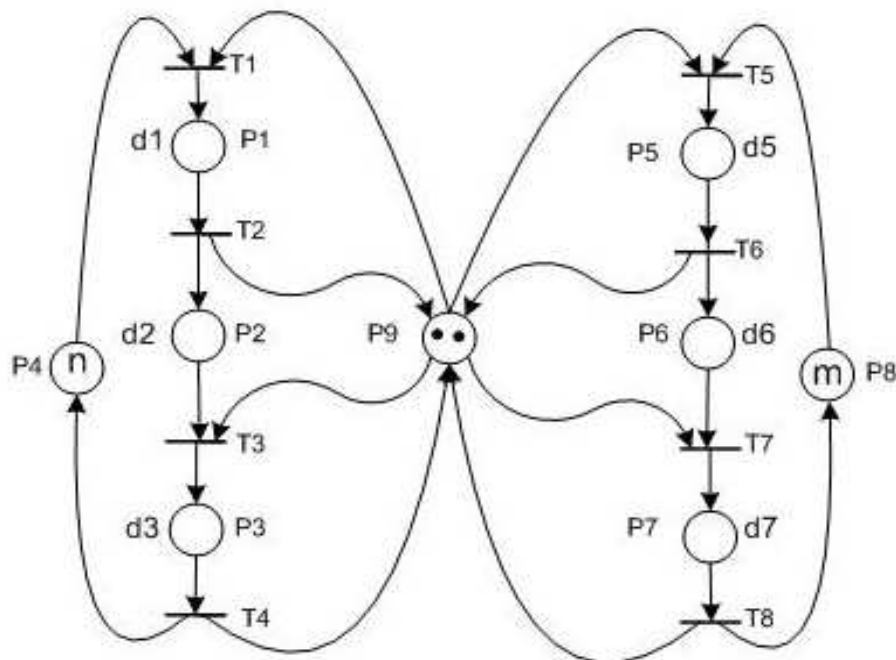


Figure 1: location de pédalos et bateaux

1. Etude du réseau de Petri par Algèbre Linéaire

- Déterminer la matrice d'incidence arrière et la matrice d'incidence du réseau de Petri représenté figure 1.
- Déterminer un ensemble minimal de P-semi flots élémentaires.
- En déduire les invariants de marquage. Interpréter les différents invariants de marquage obtenus.

2. Etude des performances temporelles

- (a) A partir des résultats des questions 1a et 1b, déterminer l'ensemble des inégalités satisfaites par les fréquences de franchissement des différentes transitions.
- (b) En déduire la fréquence maximale d'utilisation d'un bateau (fréquence de franchissements F_5 de la transition T_5) et la fréquence maximale d'utilisation d'un pédalo (fréquence de franchissements F_1 de la transition T_1).
- (c) Représenter dans un plan avec la fréquence de franchissements F_1 en abscisse et la fréquence de franchissement F_5 en ordonnée, l'ensemble des fréquences F_1 et F_5 qu'il est possible d'obtenir (la zone correspondante sera hachurée).
- (d) On suppose maintenant que l'on fonctionne toujours avec une fréquence de franchissement F_5 maximale. Dans ce cas, donner la fréquence maximale d'utilisation d'un pédalo. Quel est le nombre minimum (arrondir à l'entier le plus proche) de pédalos nécessaires pour le fonctionnement à F_5 max ?