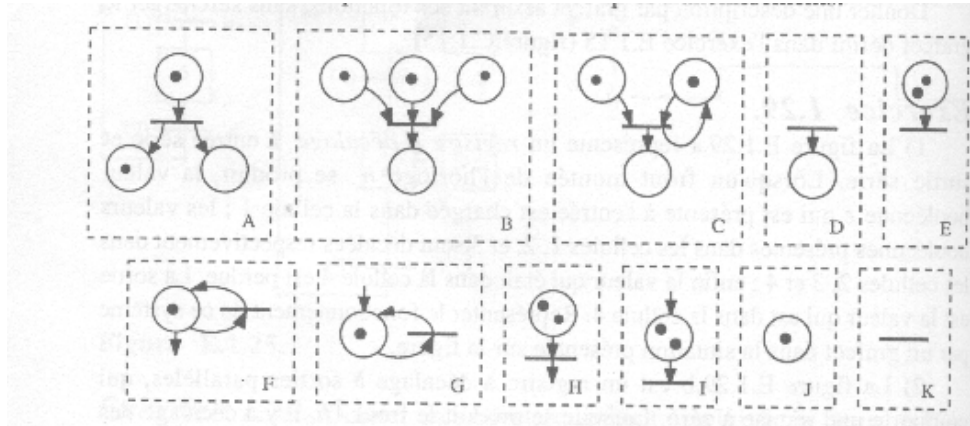


**TD Réseaux De Pétri n°1 :**  
**Modélisation par RDP**

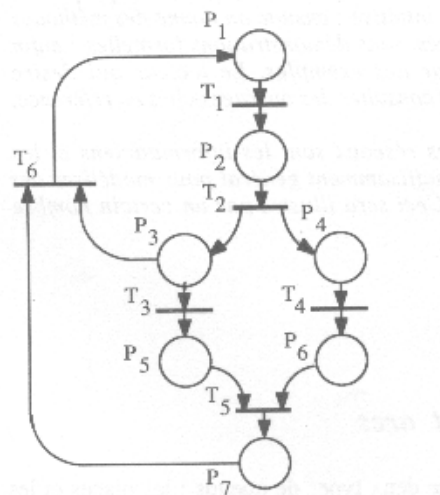
**Exercice 1**

Les réseaux suivant sont-ils des réseaux de Pétri ? Si oui, indiquer les transitions validées, les marquages après franchissements et les transitions encore validées après franchissement.

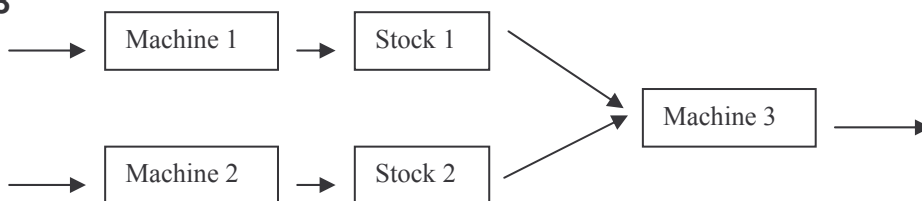


**Exercice 2**

Le réseau de Pétri suivant est-il un graphe d'états ? un graphe d'événements ? sans conflit ? pur ?



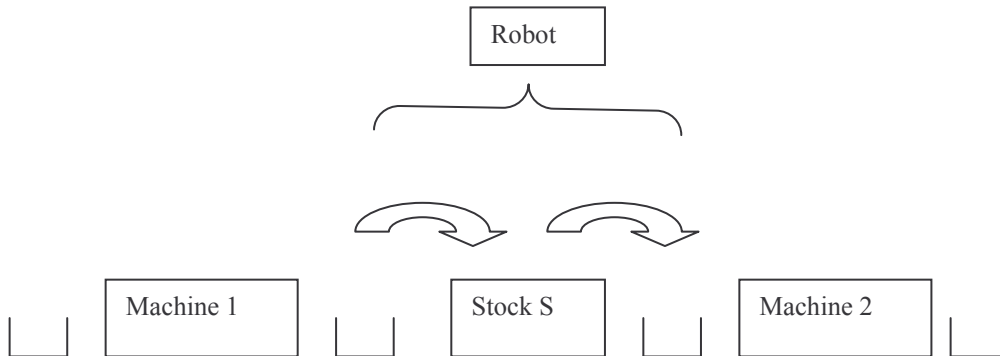
**Exercice 3**



La Machine 1 (respectivement la Machine 2) reçoit une pièce, la traite puis la dépose dans le Stock 1 (respectivement Stock 2). Elles ne peuvent traiter qu'une seule pièce à la fois. La Machine 3 fait l'assemblage : elle prend une pièce dans le Stock 1 et dans le Stock 2, elle les assemble avant de les déposer dans un stock aval non considéré.

1. Construire le réseau de Pétri modélisant ce système.
2. On considère que les stocks ont une capacité limitée de 2 et de 3 pièces respectivement. Modifier le réseau de Pétri pour prendre en compte cela.
3. On considère que les machines peuvent tomber en panne lors de la production d'une pièce et qu'une réparation peut intervenir permettant de reprendre la production. Modifier le réseau de Pétri pour prendre en compte cela.

#### Exercice 4



On considère deux machines (Machine 1 et Machine 2) qui travaillent en ligne. Chaque machine dispose d'un stock amont et d'un stock aval d'une capacité limitée à une pièce chacun. Entre le stock aval de la Machine 1 et le stock amont de la Machine 2 se trouve un stock Stock S d'une capacité limitée à 4 pièces. Un robot permet de transporter une pièce à la fois soit du stock aval de la Machine 1 vers le Stock S, soit du Stock S vers le stock amont de la Machine 2.

Construire le réseau de Pétri modélisant :

- Chaque machine avec ses stocks amont et aval ;
- Le Stock S avec le robot assurant le transport ;
- Le système complet.

#### Exercice 5

- 1) On considère le protocole suivant de gestion des cabines et des paniers d'une piscine. A l'entrée, un client qui a trouvé une cabine libre y entre et se change en posant ses vêtements dans la cabine. Il demande ensuite un panier qu'il remplit pour libérer la cabine et va se baigner. Après la baignade, le client rentre dans une cabine avec son panier, le vide et le libère. Enfin il se rhabille et libère la cabine. Soit  $N_c$  le nombre de cabines et  $N_p$  le nombre de paniers. Modéliser ce protocole par un réseau de Pétri en prenant  $N_c=3$  et  $N_p=5$ . Le nombre de clients à la baignade (c'est-à-dire après le déshabillage et avant le rhabillage) est-il borné ? Le réseau de Pétri est-il borné ? Montrer qu'il y a un état de blocage. Y a-t-il blocage pour toutes valeurs de  $N_c$  et de  $N_p$  ?
- 2) Définir un protocole tel qu'il n'y ait pas de blocage et donner le réseau de Pétri correspondant.
- 3) Modifier le réseau de Pétri du 2) pour modéliser le nombre de clients qui attendent une cabine pour rentrer à la piscine.

#### Exercice 6 : Modélisation d'un système de communication par un réseau de Pétri

On considère le système de communication d'un satellite vers une station terrestre. A travers un seul canal de communication **C1**, deux types de messages doivent être émis :

1. les données issues d'expériences scientifiques ;
2. les données de surveillance du satellite.

Chaque message du premier type est généré par un programme informatique **F1** puis, si le canal **C1** est libre, il est transmis par ce canal. Chaque message du second type est généré par un programme informatique **F2** puis, si le canal **C1** est libre, il est transmis par ce canal. Les deux programmes **F1** et **F2** peuvent s'exécuter simultanément.

## 1) Modélisation du système de communication par Réseaux de Pétri.

- Modéliser l'émission de messages du premier type via **C1** par un Réseau de Pétri.
- Modéliser l'émission de messages du premier type et du second type via **C1** par un Réseau de Pétri.

## 2) Modélisation prenant en compte les alarmes

On suppose maintenant que les messages du second type peuvent être de deux catégories :

- normaux* : ils sont générés par le programme informatique **F2** et sont envoyés par **C1**, comme cela a été décrit précédemment ;
- alarmes* : ils sont générés par un troisième programme informatique **F3** et sont envoyés par un second canal **C2**.

Les programmes informatiques **F2** et **F3** ne peuvent pas s'exécuter simultanément. Par contre, les canaux **C1** et **C2** peuvent simultanément transmettre un message. Modéliser le fonctionnement complet du système de communication par un Réseau de Petri.

## TD Réseaux De Pétri n°2 Propriétés

### Exercice 1

Calculer des invariants de marquages pour le réseau de Pétri de :

- Deux programmes qui partagent une mémoire commune.
- Système producteur -> magasin -> consommateur.

### Exercice 2

Construire le réseau de Pétri d'une pile FIFO (First Input First Output) à quatre éléments. Quel est son invariant de marquage ?

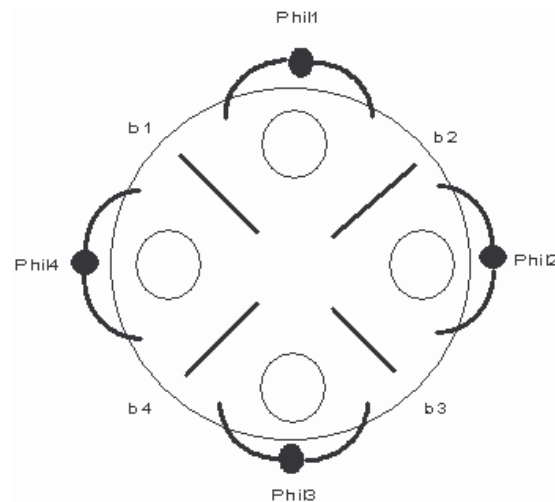
### Exercice 3

Comme l'indique la figure ci-contre, quatre philosophes Phil1 à Phil4 sont autour d'une table, disposant des baguettes  $b_1$  à  $b_4$  disposées entre eux.

Un philosophe peut avoir quatre états:

- il n'a pas de baguette et il pense.
- il a une baguette et s'apprête à prendre la deuxième.
- il a les deux baguettes et il mange.
- il a déposé une baguette et n'en a plus qu'une seule qu'il s'apprête à déposer pour recommencer à penser.

A l'état initial tous les philosophes pensent et les baguettes sont posées sur la table.

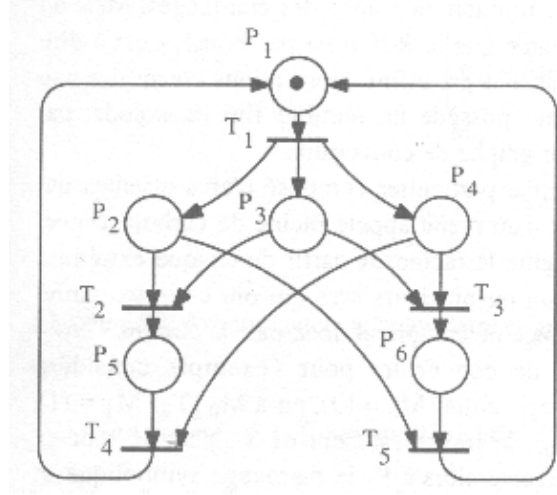


- Décrire par un RDP le protocole suivant: lorsqu'un philosophe désire manger, il prend la baguette à sa droite, puis celle qui est à sa gauche et se met à manger. Quand il a fini, il repose la baguette de droite puis celle de gauche. A l'état «  $i$  » du philosophe «  $n$  » sera associée une place «  $P_{ni}$  » et il pourra être utile de représenter la disponibilité de la baguette «  $b_j$  » par une place «  $P_{bj}$  » marquée ou non. Compte tenu de la symétrie évidente du problème on peut se contenter de représenter la moitié du RDP concernant deux philosophes.
- Indiquer des invariants de marquage. Le réseau est-il borné ?
- Montrer qu'il y a un blocage, donner une séquence de franchissements qui y conduit et expliquer pourquoi il se produit. Le réseau est-il vivant ? quasi-vivant ? Pour éviter cette situation, nous définissons un nouveau protocole: chaque philosophe n'a plus que deux états: soit il n'a pas de baguette et il pense, soit il a les deux baguettes et il mange. Lorsqu'un philosophe qui pense veut manger, il prend simultanément les deux baguettes dont il a besoin et il les restitue simultanément après avoir mangé. Décrire par un RDP ce nouveau protocole.

### Exercice 4

Construire le graphe des marquages correspondant au réseau ci-contre avec pour marquage initial En déduire si le réseau est borné et sans blocage. En déduire l'ensemble des séquences de franchissement. Que se passe-t-il pour le marquage initial

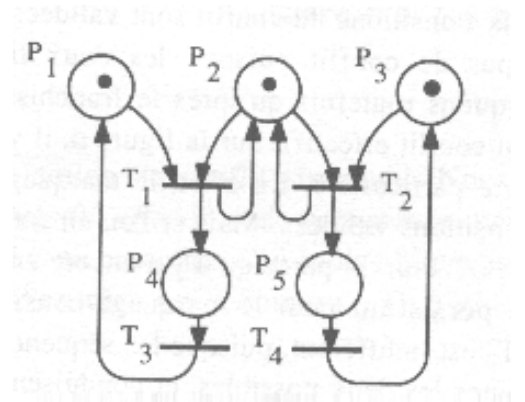
$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



### Exercice 5

Construire le graphe de marquage correspondant au réseau de Pétri ci-contre. En déduire que ce réseau est persistant. Que se passe-t-il pour le marquage initial ?

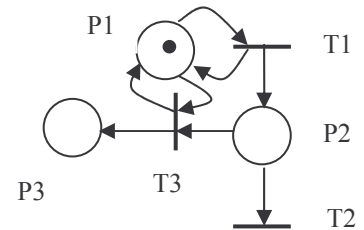
$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



### Exercice 6

Construire l'arborescence de couverture et le graphe de couverture du réseau de Pétri ci-contre.

En déduire les places qui ne sont pas bornées.



## TD Réseaux De Pétri n°3

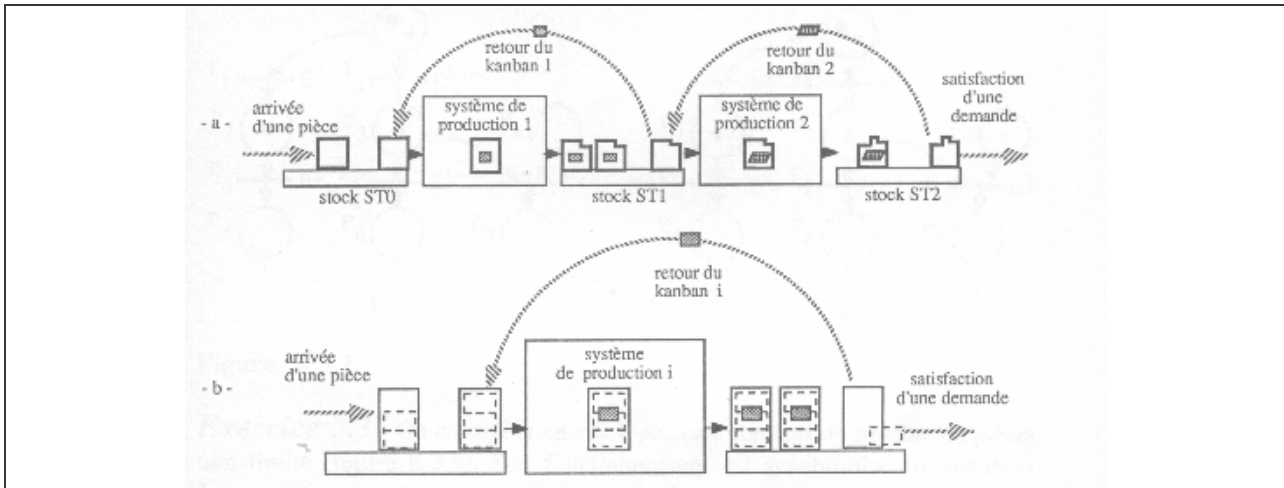
### RDP Généralisés

### Exercice n°1

L'exécution à tour de rôle de deux tâches par une unité centrale consiste à exécuter une partie des instructions de la première tâche puis une partie de la seconde tâche, ainsi de suite.

1. Modéliser par un RDP l'exécution à tour de rôle de deux tâches, avec exécution d'une instruction d'une tâche à chaque fois.
2. Modéliser par un RDP généralisé l'exécution à tour de rôle de deux tâches, avec exécution de trois instructions pour la première tâche et de six instructions pour la seconde tâche à chaque fois.
3. Quels sont les invariants de ce RDP généralisé ?

## Exercice n°2 : Conduite d'un système de production par kanbans



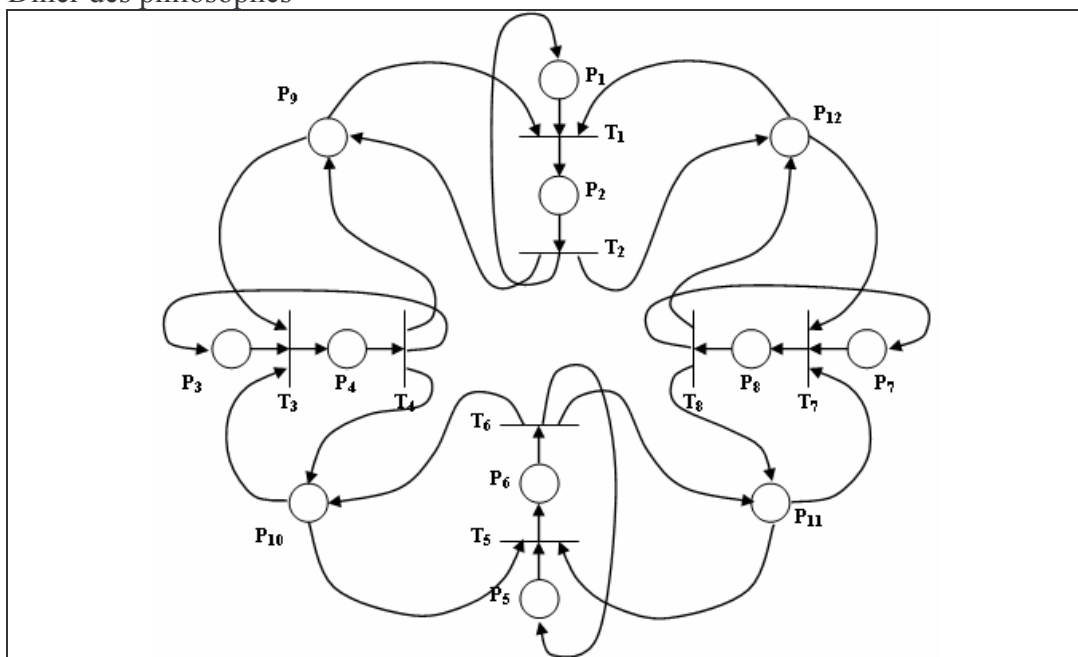
Le système de production est constitué de deux mailles en série. La maille  $i$  est composée du système de production  $i$  et de son stock de produit fini  $ST_i$ . A l'entrée du système, les pièces sont stockées dans le stock  $ST_0$ . Pour qu'une pièce du stock  $ST_{i-1}$  soit traitée par le système de production  $i$ , il faut qu'elle porte un kanban  $i$  (étiquette). Lorsque son traitement par le système  $i$  est terminé, elle est déposée dans le stock  $ST_i$  avec son kanban qui lui reste attribué. Quand une pièce est retirée du stock  $ST_i$  pour être traitée par le système  $i+1$  ou pour satisfaire la demande d'un client, on la sépare de son kanban  $i$  (qui est ramené à l'entrée du système  $i$ ) et on lui adjoint un kanban  $i+1$  si elle doit être traitée par le système  $i+1$ . Chaque système de production ne peut traiter qu'une seule pièce à la fois.

1. Représenter ce système par un RDP ordinaire dans le cas où il y a 2 kanbans dans la maille 1 et 3 kanbans dans la maille 2 et où il n'y a pas eu de demandes de clients depuis longtemps.
2. On suppose maintenant que les pièces sont traitées par un système de production  $i$  par lot de 3. Un kanban est associé à un lot de 3. Les pièces entrent 1 par 1 dans le stock  $ST_{i-1}$  et sortent 1 par 1 du stock  $ST_i$ . Représenter le RDP modélisant le système de production  $i$  dans le cas où il y a 2 kanbans.

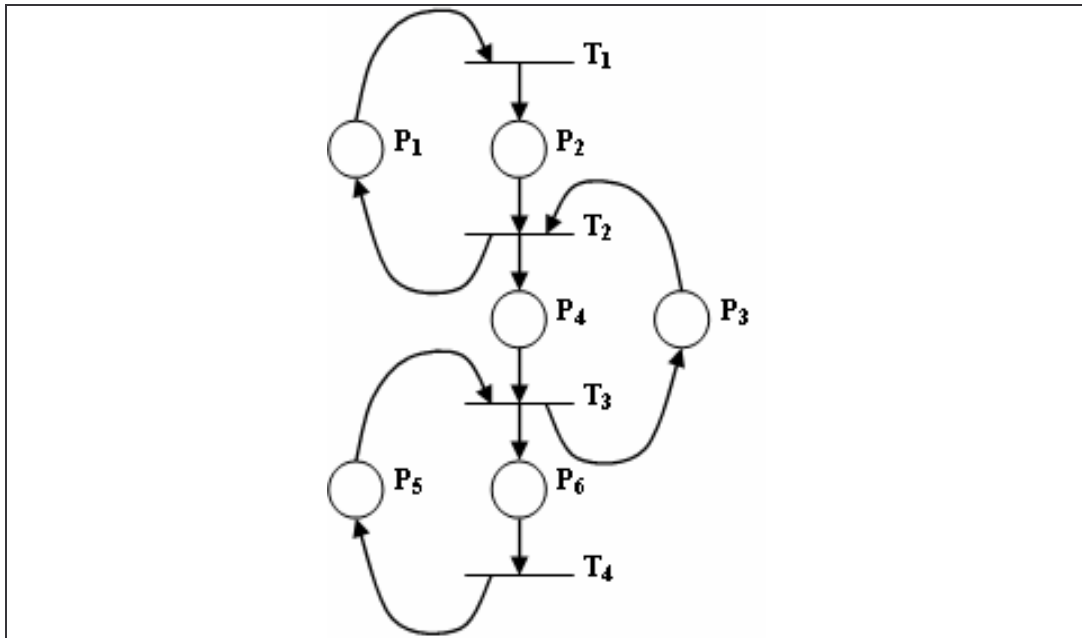
## TD Réseaux De Pétri n°4 RDP & Algèbre Linéaire

Faire l'analyse des RDP suivants en utilisant l'algèbre linéaire :

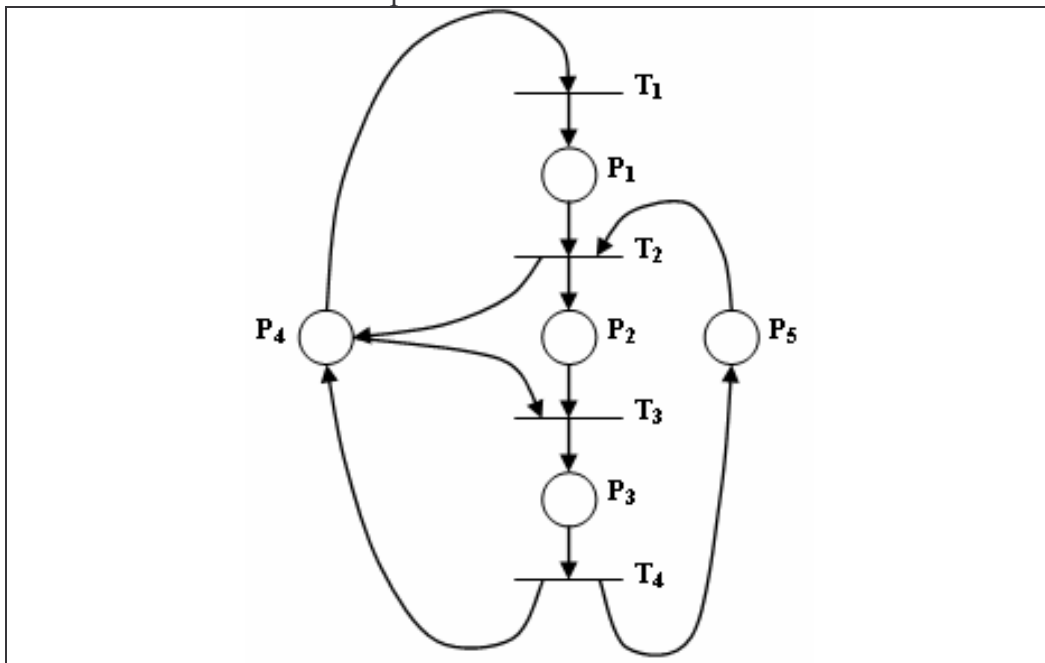
1. Dîner des philosophes



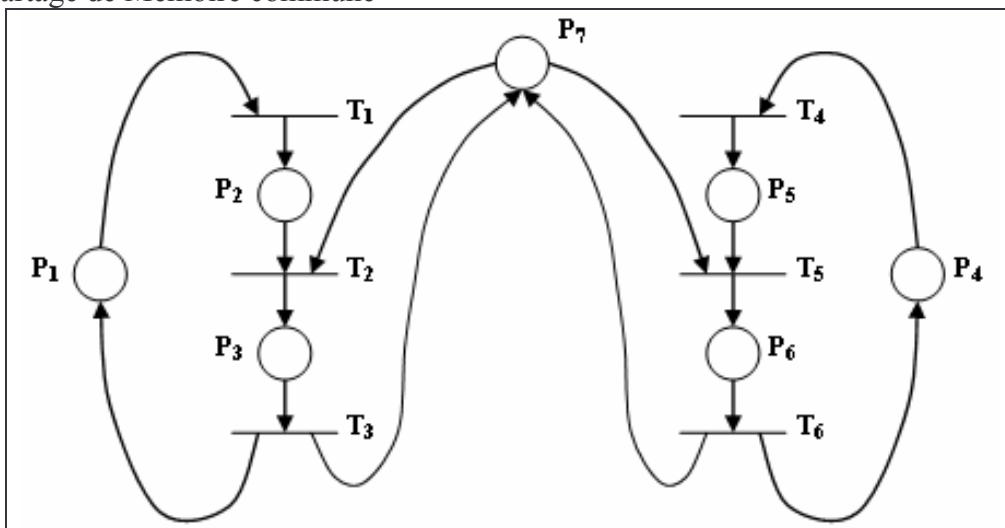
2. Système Producteur - Consommateur



3. Gestion d'entrées-sorties d'une piscine



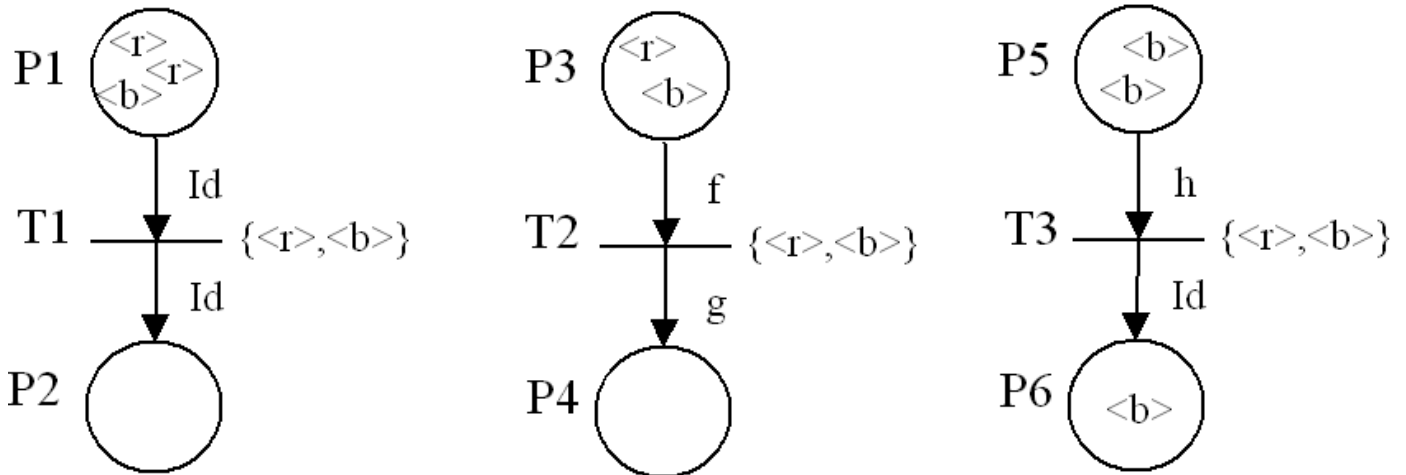
4. Partage de Mémoire commune



**Exercice n°1 : Evolution de Réseaux de Pétri colorés**

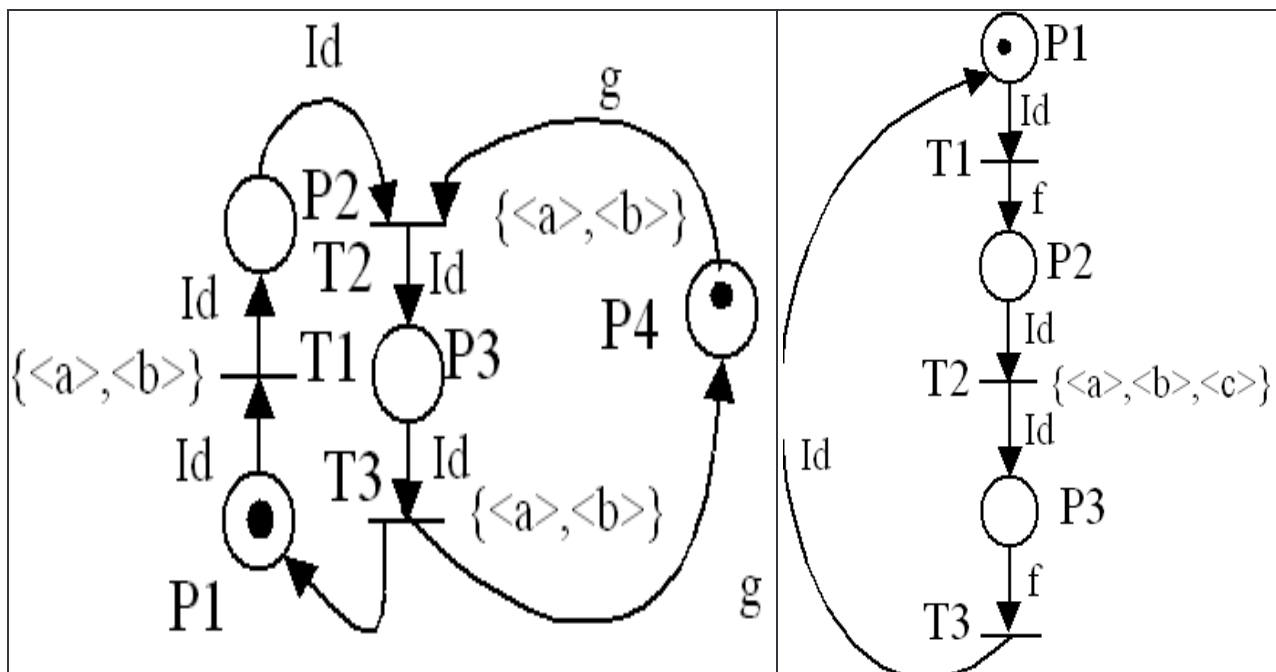
Etant donnés les marquages des places P1, P3 et P5 des trois Réseaux de Pétri colorés ci-dessous, donner l'ensemble de couleurs pour lesquelles les transitions T1, T2 et T3 sont franchissables.

Id est la fonction identité ; f est définie par  $f(\langle r \rangle) = \langle r \rangle + \langle b \rangle$  et  $f(\langle b \rangle) = \langle b \rangle$ ,  
g est définie par  $g(\langle r \rangle) = \langle b \rangle$  et  $g(\langle b \rangle) = \langle b \rangle$ , h est définie par  $h(\langle r \rangle) = 2\langle b \rangle$  et  $h(\langle b \rangle) = \langle r \rangle$ .



**Exercice n°2 : Dépliage de Réseaux de Pétri colorés**

Déplier les deux Réseaux de Pétri colorés ci-après. Id est la fonction identité ; f est définie par  $f(\langle \bullet \rangle) = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$  et g est définie par  $g(\langle a \rangle) = \langle \bullet \rangle$  et  $g(\langle b \rangle) = \langle \bullet \rangle$ .

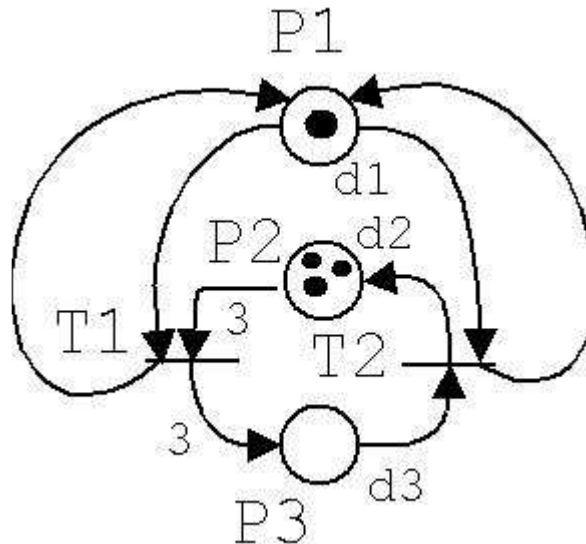


**Exercice n°3: Le dîner des philosophes «colorisé»**

Dans l'exercice 3 du TD 2, le dîner de quatre philosophes disposant de quatre baguettes a été modélisé par un Réseau de Pétri. En associant une couleur à chaque philosophe et à chaque baguette, le modéliser par un Réseau de Pétri coloré.

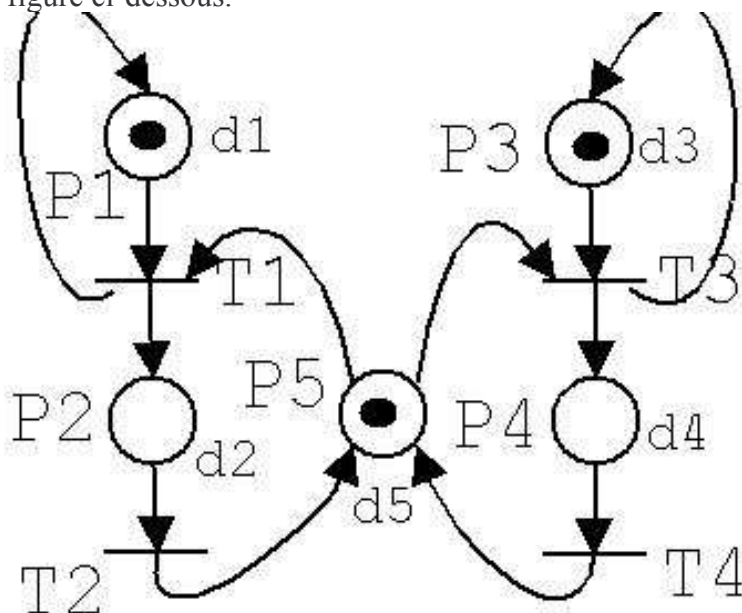
**Exercice n°1 : Fréquences de franchissement max. d'un RDP généralisé P-temporisé**

Calculer les fréquences de franchissement des transitions du RDP généralisé P-temporisé ci-dessous, à vitesse maximale avec  $d1 = 1$ ,  $d2 = 1$  et  $d3 = 1$ .



**Exercice n°2 : Etude des performances temporelles d'un système de communication**

L'envoi de messages générés par deux programmes informatiques différents s'exécutant en parallèle à travers d'un canal de communication peut être modélisé par le RDP P-temporisé ci-dessous. Le marquage initial est indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Déterminer la matrice d'incidence arrière et la matrice d'incidence.
2. Déterminer un ensemble minimal de P-semi flots élémentaires.
3. En déduire l'ensemble des relations satisfaites par les fréquences de franchissement des différentes transitions.

On suppose que  $d1 = 3$ ,  $d2 = 1$ ,  $d3 = 1$ ,  $d4 = 2$  et  $d5 = 1$ .

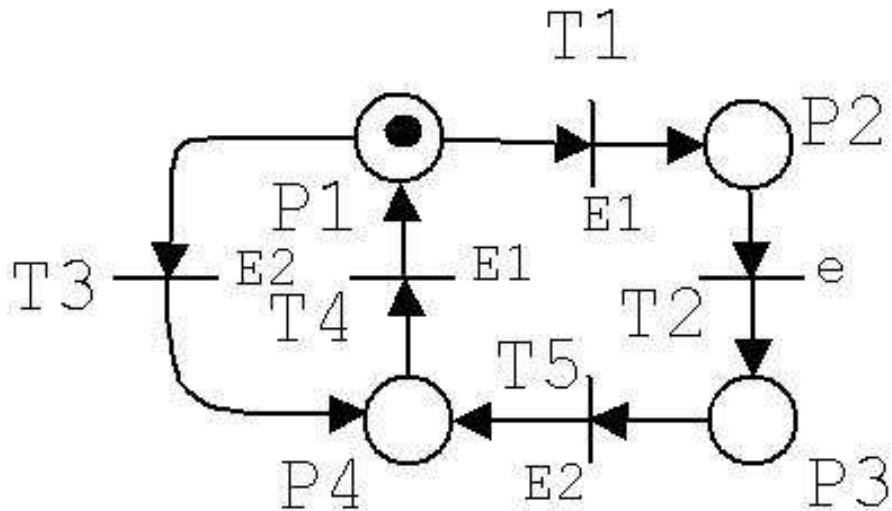
4. Montrer que la plus grande fréquence de franchissement de la transition T3 correspond à une fréquence de franchissement de la transition T1 nulle.
5. Montrer que la plus grande fréquence de franchissement de la transition T1 peut être obtenues pour des fréquences de franchissement de la transition T3 non nulle.

6. Déterminer alors la plus grande fréquence de franchissement de la transition T3 possible.

**TD Réseaux de Petri n°7**  
**RDP Synchronisés**

**Exercice n° 1 : Graphe des marquages stables d'un RDP synchronisé**

Construire le graphe des marquages stables pour le RDP synchronisé ci-dessous.



**Exercice n 2 : Gestion des demandes pour un stock**

On considère un stock dont la capacité n'est pas limitée. Son fonctionnement est synchronisé sur deux événements :

- l'arrivée d'une pièce (événement E1)
- la demande d'une pièce en stock (événement E2).

Lors d'une demande, s'il y a une pièce en stock, elle est immédiatement satisfaite.

Modéliser ce système par un RDP synchronisé dans les deux cas suivants :

1. Une demande qui ne peut pas être satisfaite (stock vide) est « perdue » : l'utilisateur devra donc renouveler sa demande ;
2. Une demande qui ne peut pas être satisfaite (stock vide) est mémorisée et sera satisfaite dès que le stock contiendra au moins une pièce.