1ère session janvier 2009

TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL
EEA 22

Responsable : G.BINET.

Durée : **2h**.

Documents autorisés:

Formulaire personnel manuscrit de 2 pages maximum.

Calculatrices.

Tables de transformées en Z

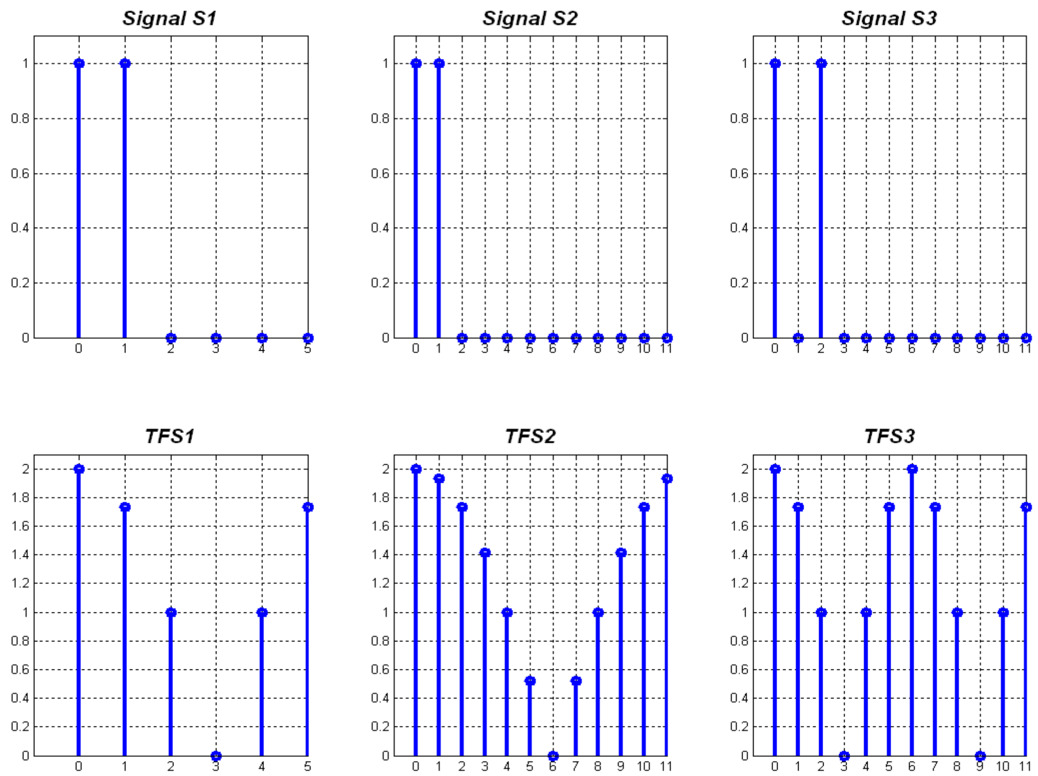
Remarque: La réponse aux questions doit être précise, claire et logique. Il est inutile et fortement déconseillé d'encombrer la solution par des remarques générales hors sujet.

Chaque candidat doit, au début de l'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après avoir été pointé. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.

I

A propos de la TFD (Transformée de Fourier Discrète)

La figure ci-dessous représente différents signaux ainsi que le module de leur TFD.



En utilisant une numérotation de gauche à droite puis du haut vers le bas nous y trouvons 6 représentations telles que :

1 → signal S1 4 → TFS1 ≡ TFD de S1

2 → signal S2 5 → TFS2 ≡ TFD de S2

3 → signal S3 6 → TFS3 ≡ TFD de S3

(Les abscisses des différentes courbes représentent des numéros d'échantillons)

1. Le signal S1 est obtenu avec un échantillonnage à la fréquence 1200 Hz. Définir la transformée de Fourier discrète, calculer celle du signal S1 et en déduire les valeurs présentées dans le cadre 4. Etalonner l'axe des fréquences de ce cadre (*On justifiera cet étalonnage)*.

2. Le signal S2 est obtenu à partir du signal S1, comment ? Calculer sa TFD, quel est le lien entre la TFD de S2 et celle de S1 ? *(le justifier)*. Etalonner l'axe des fréquences du cadre 5. Quel est l'intérêt pratique d'une telle manipulation ?

3. Le signal S3 est obtenu à partir du signal S1, comment ? Calculer sa TFD, quel est le lien entre la TFD de S3 et celle de S1 ? *(le justifier)*. Etalonner l'axe des fréquences du cadre 6. . Quel est l'intérêt pratique d'une telle manipulation ?

II

Etude d'un système discret

Dans cet exercice on utilisera des temps et des fréquences normalisés par respectivement la période d'échantillonnage et la fréquence d'échantillonnage.

Un filtre discret a comme fonction de transfert :

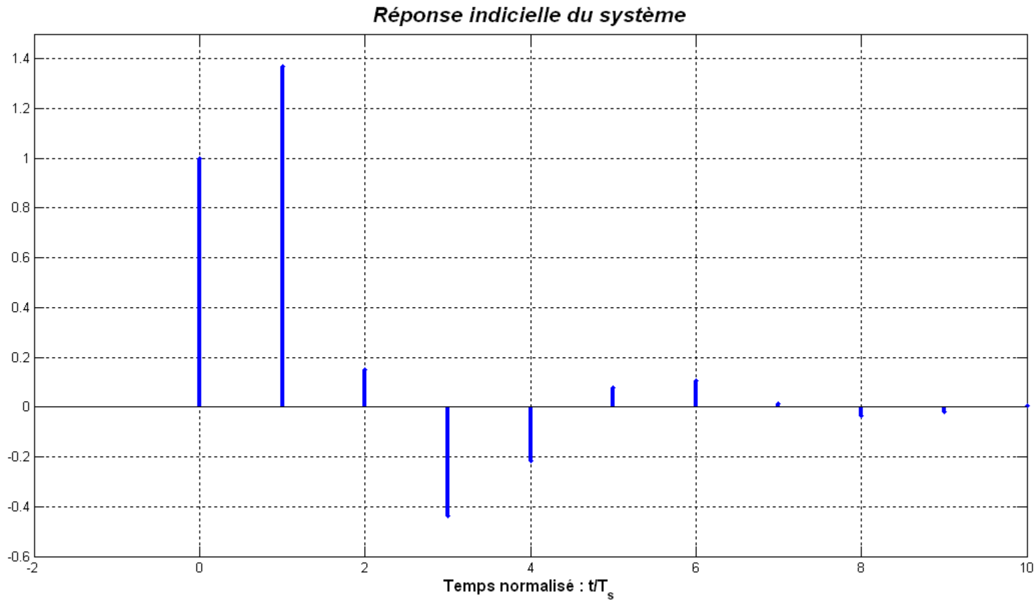
$$G(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 0{,}371\,z + 0{,}36}$$

1. On mesure expérimentalement le gain pour les fréquences normalisées : 0,1 – 0,2 – 0,3 et on trouve respectivement environ : 1,43 - 3,12 – 1,9.

1.1 Calculer les pôles et les zéros de la fonction de transfert (*Il est plus simple de les calculer sous la forme module/argument c'est à dire : r $e^{j\varphi}$*). Représenter leur position dans le plan z.

1.2 A partir de la position des pôles et des zéros et des mesures expérimentales, tracer l'allure du module de la réponse en fréquence du filtre. (*Il est demandé d'argumenter clairement les étapes de ce tracé).*

2 La réponse indicielle du système est relevée expérimentalement et donne le résultat indiqué sur le graphique ci-dessous :



2.1 Justifier les valeurs initiales et finales.

2.2 En notant $r\,e^{\pm j\varphi}$ les deux pôles du système, grâce à la méthode des résidus, exprimer y_k (échantillon de la sortie à $t = kT_s$) en fonction de r et de φ. Vérifier la valeur numérique des 6 premiers échantillons.

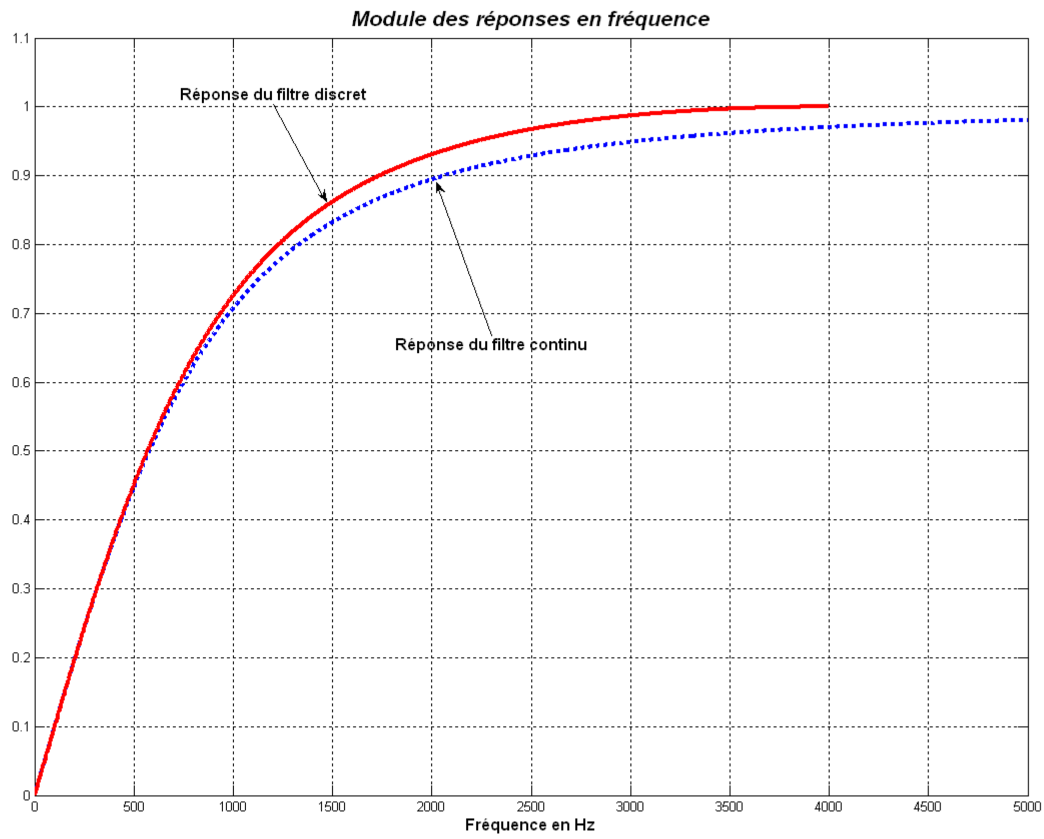
2.3 En notant x(t) le signal d'entrée et y(t) le signal de sortie, écrire l'équation récurrente permettant de calculer l'échantillon y_k. Avec celle-ci, calculer les 6 premiers échantillons et vérifier l'accord avec la question **2.2**.

III
Transposition d'un filtre RII

Un filtre continu a comme fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{p}{p + 6283}$$

le module de sa réponse en fréquence est indiquée sur la figure ci-dessous et nous cherchons un filtre discret équivalent travaillant à la fréquence d'échantillonnage $f_s = 8000$ Hz.



1. Transformation bilinéaire .

La première méthode utilisée est la transformée bilinéaire et le résultat obtenu est indiqué sur la figure précédente.

1.1 Etablir l'expression de la transformation bilinéaire

1.2 Quelle est l'expression de la fonction de transfert $G_1(z)$ obtenue ? *(Elle sera mise sous forme monic)*

1.3 Les fréquences pour lesquelles l'atténuation des filtres continus et discrets est de 0,9 ne sont pas identiques. Pourquoi ? Etablir la relation théorique entre ces deux fréquences et faire l'application numérique.

1.4 On veut que la fréquence d'atténuation à 0,9 du filtre transposé soit la même que celle du filtre continu. Que faut-il faire ? Calculer la nouvelle fonction de transfert $G_2(z)$.

2. Invariance impulsionnelle.

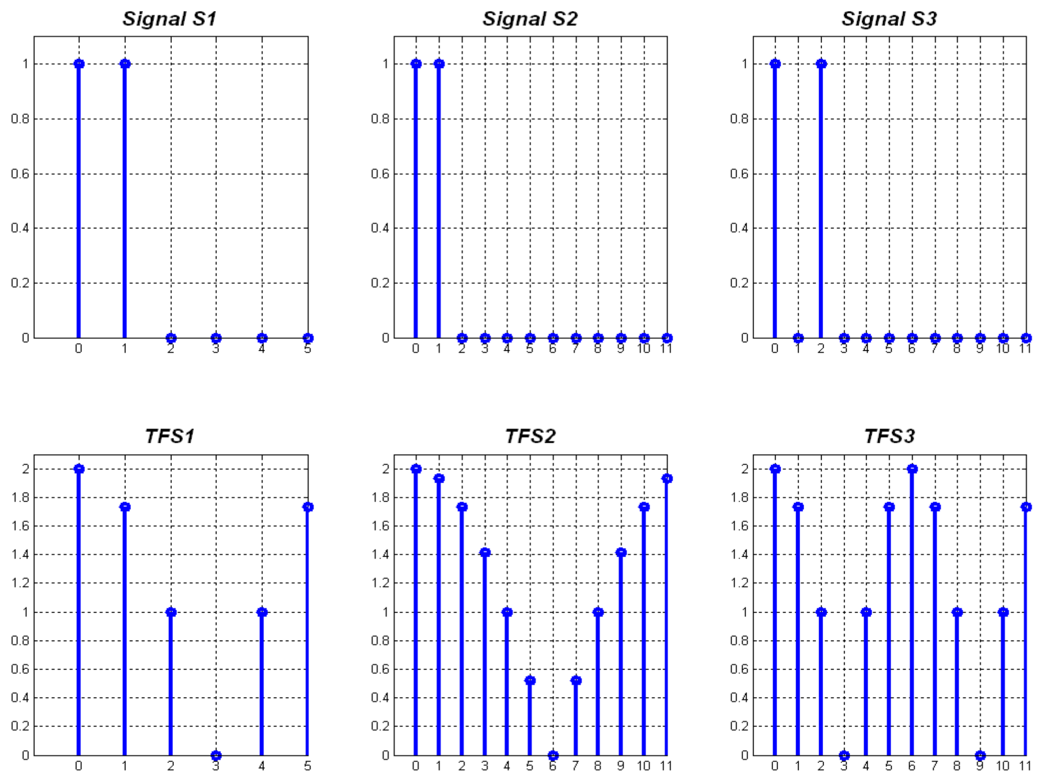
En tentant de transposer le filtre continu par la méthode d'invariance impulsionnelle, nous obtenons des absurdités.

2.1 Rappeler le principe de la méthode

2.2 Tenter la transposition et indiquer les raisons de son échec.

I

A propos de la TFD (Transformée de Fourier Discrète)



1. La transformée de Fourier discrète ou TFD est par définition : $X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$ avec N = longueur du signal traité, k =[0 ; 1 ; ……..; N-1] et n =[0 ; 1 ; ……..; N-1].

Pour le signal S1, N=6.

$$X_n = 1 + e^{-\frac{j2\pi n}{N}} = e^{-\frac{j\pi n}{N}} 2\cos(\frac{\pi n}{N}) \quad \Rightarrow \quad |X_n| = 2\cos(\frac{\pi n}{6})$$

Nous retrouvons bien : $X_0 = 2 \quad X_1 = \sqrt{3} = 1{,}732 \quad X_2 = 0$...........

La TFD calcule les échantillons de la bande de fréquences normalisées [0 ; 1[. Le pas fréquentiel est l'inverse du temps d'acquisition soit $\Delta f = \frac{1}{N\,T_s} = \frac{F_s}{N}$ ici $\Delta f = 100\,\text{Hz}$

2. Le signal S2 est obtenu à partir du signal S1 en ajoutant des zéros (ici 6 zéros sont ajoutés). Cela revient à conserver la fréquence d'échantillonnage et à augmenter le nombre d'échantillons qui devient ici N=12

$$X_n = 1 + e^{-\frac{j2\pi n}{N}} = e^{-\frac{j\pi n}{N}} 2\cos(\frac{\pi n}{N}) \quad \Rightarrow \quad |X_n| = 2\cos(\frac{\pi n}{12})$$

Augmenter N sans changer F_s revient à diminuer le pas fréquentiel tout en conservant la même bande de Shannon $\Rightarrow$ C'est le "zéro padding" ou interpolation fréquentielle. Dans l'exemple ici, nous vérifions que les échantillons 1,3,5,7,9,11 de TFS2 sont les échantillons de TFS1. Pour les valeurs des échantillons pairs, ce sont des valeurs interpolées. Le pas fréquentiel est donc ici de 50 Hz.

3. Le signal S3 est obtenu à partir du signal S1 en intercalant des zéros entre chaque échantillon. Cela revient à diminuer (ici de moitié) la période d'échantillonnage tout en gardant un temps d'acquisition constant $\Rightarrow$ la bande de Shannon voit sa taille augmentée (ici 2 fois) et le pas fréquentiel reste le même.

$$X_n = 1 + e^{-\frac{j4\pi n}{N}} = e^{-\frac{j2\pi n}{N}}\, 2\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad \Rightarrow \quad |X_n| = 2\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)$$

Les échantillons sont bien les mêmes que ceux de TFS1 mais ici N = 12 et donc n=[0 ; 11[. Nous visualisons 2 fois la bande de fréquence de S1.

La pas fréquentiel est donc ici de 100 Hz.

Ce système peut, après un filtrage passe-bas fournir une interpolation temporelle du signal étudié.

Remarque : cette interpolation ne fonctionne correctement que si le signal a été échantillonné en respectant

II

Etude d'un système discret

$$G(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 0{,}371\,z + 0{,}36}$$

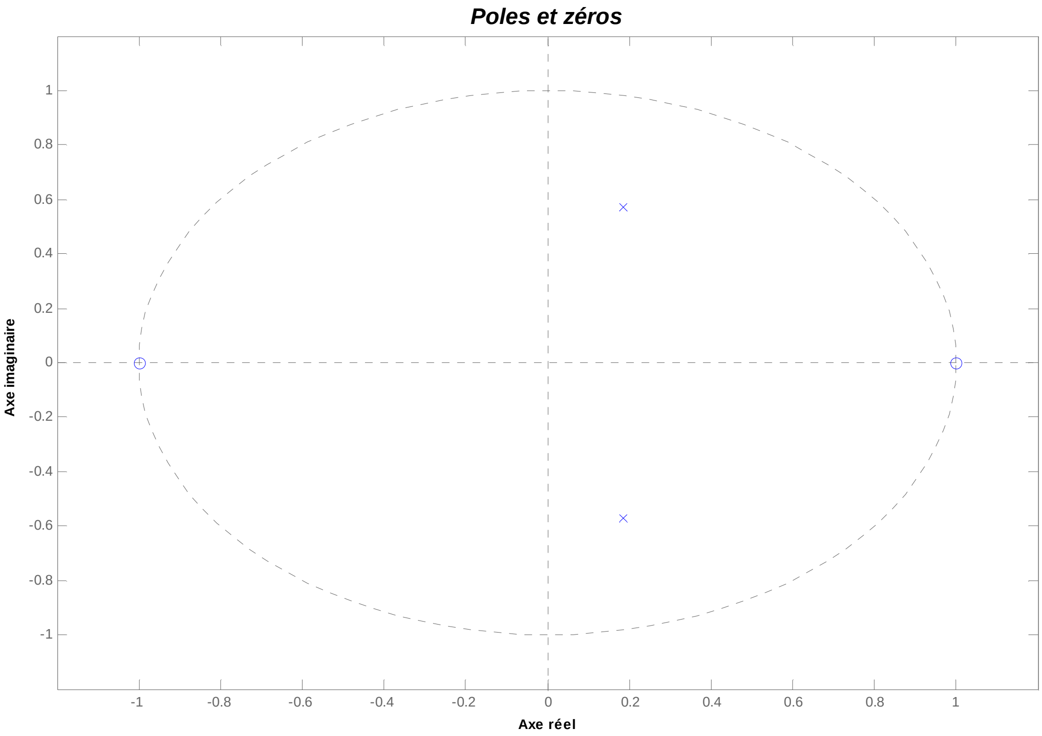
1. f = { 0,1 – 0,2 – 0,3 } $\rightarrow$ |H(f)| = { 1,43 - 3,12 – 1,9.}

1.1 Calcul des zéros : z =1 et z =-1

Calcul des pôles :

$r^2 = 0{,}36 \quad \Rightarrow \quad r = 0{,}6$

$-2r\cos(\varphi) = -0{,}371 \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = 0{,}309 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 1{,}256$ rd

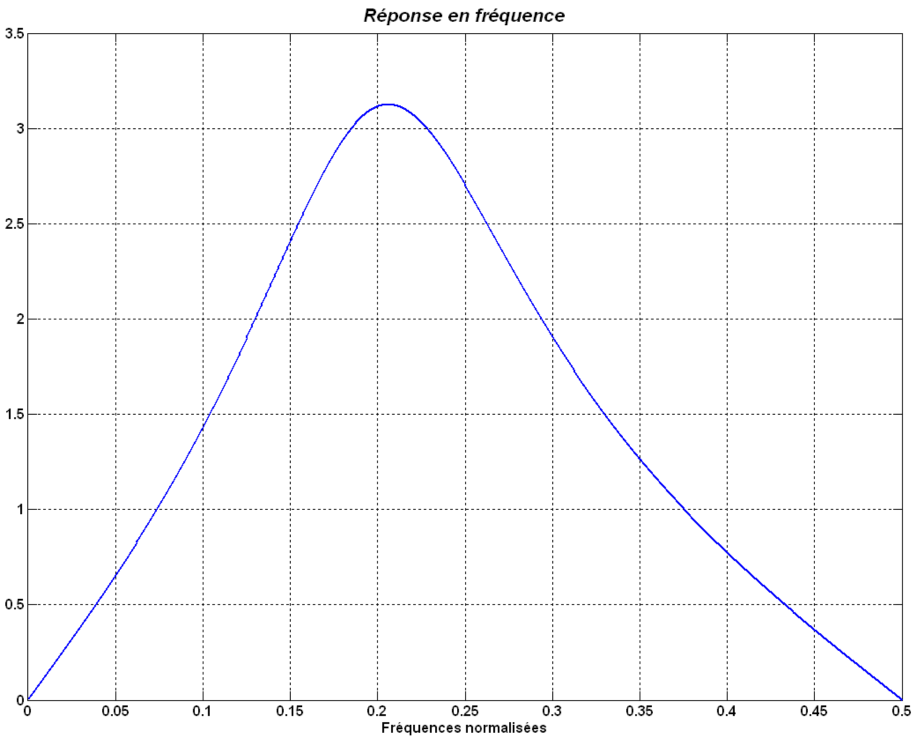


1.2 Un zéro en z = 1 ⇒ |H(f)| = 0 pour f = 0

Un zéro en z = -1 ⇒ |H(f)| = 0 pour f = 0,5

Des pôles proches du cercle unité ⇒ une résonance pour f = 1,256/(2π) = 0,2. C'est ce que révèlent aussi les mesures mais maintenant nous pouvons affirmer qu'il s'agit du maximum.

La réponse en fréquence sera donc :



2

2.1 $G(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 - 0{,}371\,z + 0{,}36}$

$$\Rightarrow \qquad Y(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 0{,}371\,z + 0{,}36}\,\frac{z}{z-1} = \frac{(z+1)\,z}{z^2 - 0{,}371\,z + 0{,}36} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0{,}371\,z^{-1} + 0{,}36\,z^{-2}}$$

La valeur initiale peut se justifier de plusieurs manières : Valeur de Y(+∞) = 1 ou premier terme de la division polynomiale en z^{-1} = 1

La valeur initiale peut aussi se justifier de deux manières : avec le théorème de la valeur finale $\lim\limits_{z \to 1}[\,(z-1)\,Y(z)\,] = 0$ où en remarquant que le gain en continu est nul (réponse fréquentielle de la question 1).

2.2 La TZ de la réponse indicielle peut se mettre sous la forme :

$$Y(z) = \frac{(z+1)\,z}{z^2 - 0{,}371\,z + 0{,}36} = \frac{(z+1)\,z}{(z - r\,e^{j\varphi})\,(z - r\,e^{-j\varphi})}$$

Le résidu sur le pôle $r\,e^{j\varphi}$ est :

$$\left.\frac{(z+1)\,z\,z^{k-1}}{(z - r\,e^{-j\varphi})}\right|_{z = re^{j\varphi}} = \frac{(r\,e^{j\varphi} + 1)\,r\,e^{jk\varphi}}{r\,e^{j\varphi} - r\,e^{-j\varphi}} = \frac{(r\,e^{j\varphi} + 1)\,r^k\,e^{jk\varphi}}{2\,j\,r\sin(\varphi)}$$

Le résidu sur le pôle $r\,e^{-j\varphi}$ est le complexe conjugué du précédent :

$$\left.\frac{(z+1)\,z\,z^{k-1}}{(z - r\,e^{+j\varphi})}\right|_{z = re^{-j\varphi}} = \frac{(r\,e^{-j\varphi} + 1)\,r^k\,e^{-jk\varphi}}{-2\,j\,r\sin(\varphi)}$$

Le mode associé est la somme des deux résidus soit 2 fois leur partie réelle :

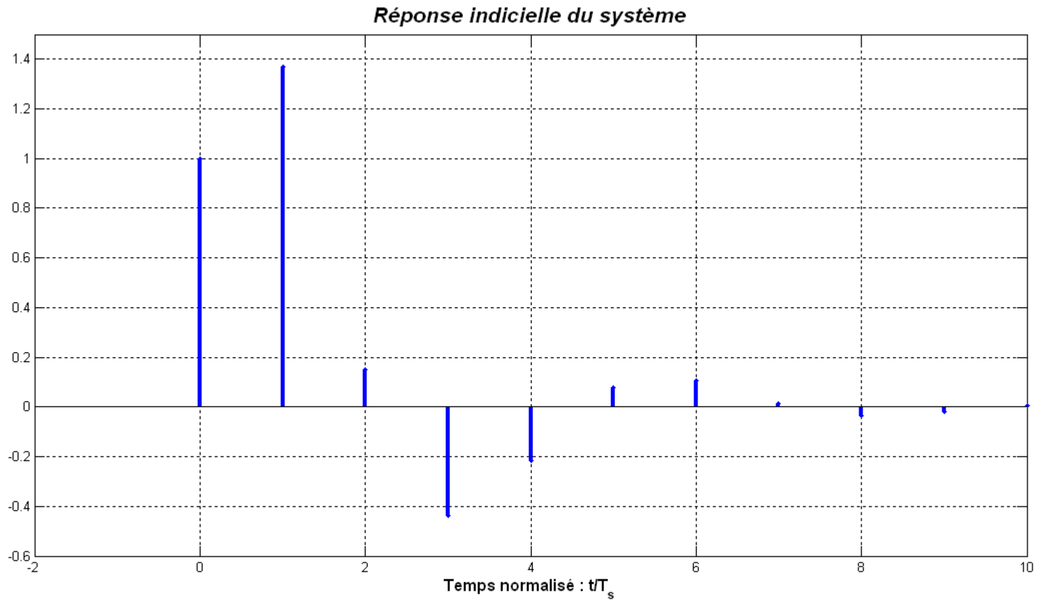
$$y_k = 2\ \mathrm{Re}\left[\frac{(r\,e^{j\varphi} + 1)\,r^k\,e^{jk\varphi}}{2\,j\,r\sin(\varphi)}\right] = \frac{\mathrm{Im}\left[(r\,e^{j\varphi} + 1)\,r^k\,e^{jk\varphi}\right]}{r\sin(\varphi)} = \frac{(r\sin((k+1)\varphi) + \sin(k\varphi))\,r^k}{r\sin(\varphi)}$$

$$y_k = r^k\,\frac{r\sin((k+1)\varphi) + \sin(k\varphi)}{r\sin(\varphi)}$$

Avec r = 0,6 et φ = 1,256 rd on peut calculer rapidement :

$y_0 = 1$; $y_1 = 1{,}371$; $y_2 = 0{,}148$; $y_3 = -0{,}439$; $y_4 = -0{,}216$; $y_5 = 0{,}078$….

Valeurs correspondant à la courbe fournie.



2.3 $Y(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 - 0{,}371\,z + 0{,}36} X(z) = \dfrac{1 - z^{-2}}{1 - 0{,}371\,z^{-1} + 0{,}36\,z^{-2}} X(z)$

D'où l'équation récurrente :

$$y_k = x_k - x_{k-2} + 0{,}371\,y_{k-1} - 0{,}36\,y_{k-2}$$

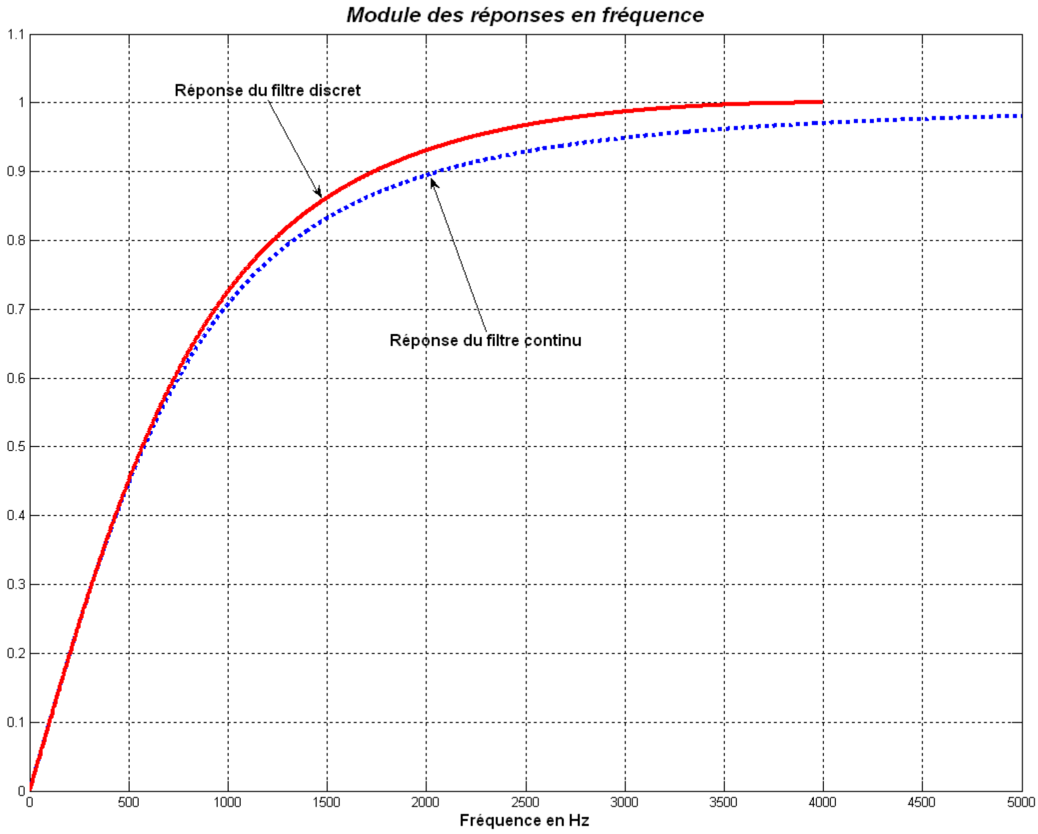
Avec des conditions initiales nulles et une excitation échelon ($x_n = 0$ pour $n < 0$ et $x_n = 1$ pour $n \geq 0$)

Le calcul pour k=[0:5] vérifie bien les valeurs de **2.2**.

III
Transposition d'un filtre RII

$$H(p) = \frac{p}{p + 6283}$$

f_s = 8000 Hz.



1. Transformation bilinéaire .

1.2 $G_1(z) = \frac{16000\,(z-1)}{16000\,(z-1) + 6283\,(z+1)} = \frac{16000\,(z-1)}{22283\,z - 9717}$

$$G_1(z) = \frac{0{,}718\,(z-1)}{z - 0{,}436}$$

1.3 L'atténuation de 0,9 est obtenue pour :

2050 Hz pour le filtre continu

1750 Hz pour le filtre discret

Cet écart provient de la compression fréquentielle réalisée par la représentation bilinéaire :

$p \rightarrow \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$ donne comme relation fréquentielle $\omega_c \rightarrow \frac{2}{T_s}\mathrm{tg}(\frac{\omega_d\,T_s}{2})$ ou $\omega_d \rightarrow \frac{2}{T_s}\mathrm{arctg}(\frac{\omega_c\,T_s}{2})$

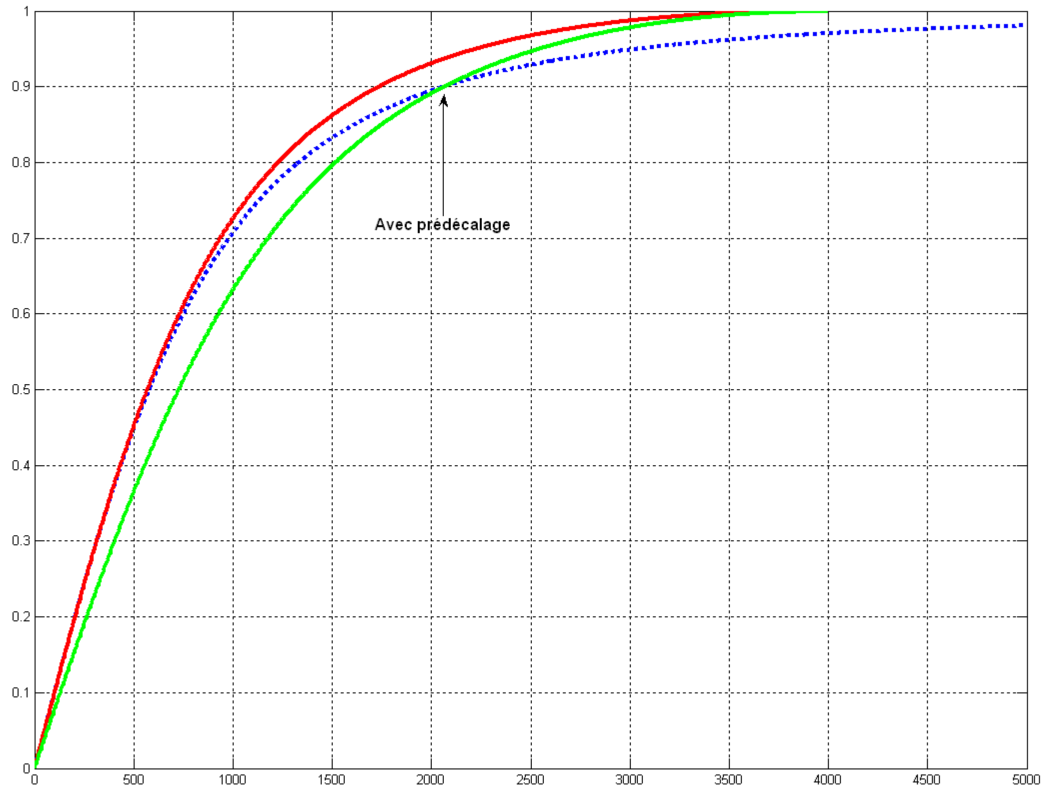
Avec $\omega_c = 2*\pi*2050$ et T_s 1/8000 $\Rightarrow$ $\omega_d = 2*\pi*1726$ ce qui est conforma au graphe aux incertitudes de lecture près.

1.4 On veut que la fréquence d'atténuation à 0,9 du filtre transposé soit la même que celle du filtre continu pour cela il faut réaliser un prédécalage du filtre continu à la fréquence recherchée soit .

$$\omega_c^* = \frac{2}{T_s}\,tg\left(\frac{\omega_c T_s}{2}\right) = 16641\,rd \qquad \frac{\omega_c^*}{\omega_c} = 1{,}292 \qquad \Rightarrow \qquad H^*(p) = \frac{\frac{p\,\omega_c}{\omega_c^*}}{\frac{p\,\omega_c}{\omega_c^*} + 6283} = \frac{p}{p+8118}$$

$$G_1(z) = \frac{16000\,(z-1)}{16000\,(z-1) + 8118\,(z+1)} = \frac{16000\,(z-1)}{24118\,z - 7882} = \frac{0{,}663\,(z-1)}{z-0{,}327}$$

Et le résultat obtenu est le suivant :



2. Invariance impulsionnelle.

2.1 L'invariance impulsionnelle a pour principe d'utiliser comme filtre discret celui dont la réponse impulsionnelle est l'échantillonnée de celle du filtre continu.

$$\Rightarrow \qquad G_3(z) = \frac{1}{T_s}\,TZ\left|TL^{-1}[\,H(p)]\right|$$

2.2 Si on tente la méthode on obtient :

$$TL^{-1}[H(p)] = TL^{-1}\left[\frac{p}{p+6283}\right] = TL^{-1}\left[1 - \frac{6283}{p+6283}\right] = \delta(t) - 6283\,e^{-6283\,t}$$

Il faut ensuite échantillonner ceci, quel est l'échantillon de $\delta(t)$ continu ? Il n'existe pas, le problème est donc impossible. On peut retrouver ceci par l'aspect fréquentiel, la réponse fréquentielle du filtre continu est de type passe-haut $\Rightarrow$ il est impossible d'échantillonner une telle réponse tout en respectant le théorème de Shannon $\Rightarrow$ la méthode ne peut être ici utilisée.